

# ФМИ ФА 2018 - Задачи

Янис Василев, [ianis@ivasilev.net](mailto:ianis@ivasilev.net)

6 юли 2018

## Задача 1

Нека  $x, x_1, x_2, \dots \in l_2$ :  $x_n \xrightarrow{w} x$  в  $l_2$ . Покажете, че съществува подредица  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  такава, че средните на Чезаро

$$\frac{x_{n_1} + x_{n_2} + \dots + x_{n_k}}{k}$$

клонят към  $x$  в  $l_2$ .

*Доказателство.* Ще построим редица  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subseteq \{x_n\}_{n=1}^\infty$ , за която средните на Чезаро ще клонят към  $x$  по норма. Нека без ограничение на общността  $x = 0$ , тъй като винаги можем да вземем редица с общ член  $x_n - x$ .

Полагаме  $n_1 = 1$  и

$$n_k = \min \left\{ n > n_{k-1} : \langle x_{n_m}, x_n \rangle < \frac{1}{k} \quad \forall m = 1, \dots, k-1 \right\}$$

за  $k > 1$ . Последното множество е непразно за всяко  $k$ , тъй като  $x_n \xrightarrow[n]{w} \vec{0}$  и следователно  $\forall k$

$$\langle x_{n_k}, x_n \rangle \xrightarrow[n]{} \langle x_{n_k}, \vec{0} \rangle = 0.$$

Така получаваме, че за фиксирано  $0 \leq i < k$

$$\sum_{j=i+1}^k \langle x_{n_i}, x_{n_j} \rangle < \sum_{j=i+1}^k \frac{1}{k} = \frac{k - (i+1)}{k} < 1,$$

откъдето следва

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_{n_i} \right\|^2 &= \left\langle \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_{n_i}, \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_{n_j} \right\rangle = \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \langle x_{n_i}, x_{n_j} \rangle = \\
&= \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k \|x_{n_i}\|^2 + \frac{2}{k^2} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \langle x_{n_i}, x_{n_j} \rangle < \frac{1}{k} \max_{i=1, \dots, k} \|x_{n_i}\|^2 + \frac{2}{k^2} \sum_{i=1}^{k-1} 1 < \\
&< \frac{1}{k} \left( \max_{i=1, \dots, k} \|x_{n_i}\|^2 + 2 \right). \quad (1)
\end{aligned}$$

Тъй като редицата  $\{x_{n_k}\}$  е слабо сходяща като подредица на  $\{x_n\}$ , то тя е ограничена в нормата според теоремата на Банах-Щайнхаус. Нека  $M > 0$  е такава, че  $x_n < M \forall n$ . Тогава от (1) получаваме, че

$$\left\| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_{n_i} \right\| < \sqrt{\frac{1}{k} (M^2 + 2)}.$$

За произволно  $\varepsilon > 0$  е достатъчно да изберем  $k > \frac{M^2+2}{\varepsilon^2}$ , за да бъде изпълнено

$$\left\| \frac{1}{k+m} \sum_{i=1}^{k+m} x_{n_i} \right\| < \varepsilon \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Оттук следва и твърдението на теоремата. □

## Задача 2

Нека  $X$  е банахово. Докажете, че ако  $x^{**} \in S_{X^{**}}$ ,  $F \subseteq X^*$  е крайно множество и  $\varepsilon > 0$ , тогава съществува  $x \in X$  с  $\|x\| < 1 + \varepsilon$  такава, че  $f(x) = x^{**}(f)$  за всяко  $f \in F$ .

*Доказателство.* Полагаме  $Z = F_{\perp} = \bigcap_{f \in F} \ker f$  и разглеждаме  $X/Z$  с каноничното изображение  $q: X \rightarrow X/Z$  ( $q(x) = x + Z$ ). Тъй като  $\text{codim} \ker f = 1$ , то  $X/Z$  е крайномерно и, следователно, рефлексивно, т.е.  $J(X/Z) = (X/Z)^{**}$ . Нормата на  $X/Z$  е  $\|q(x)\|_{X/Z} := \inf_{z \in Z} \|x + z\|_X \leq \|x\|_X$ . В частност,  $\|q\|_{B(X, X/Z)} \leq 1$  и следователно за  $q^{**}(\phi)(f)(x) = \phi(f(q(x)))$  също имаме  $\|q^{**}\|_{B(X, X/Z)^{**}} \leq 1$ .

От рефлексивността на  $X/Z$  можем да изберем  $x_0 \in X$  такава, че  $J(q(x_0)) = q^{**}(x^{**})$ , при това  $\|q(x_0)\|_{X/Z} = \|q^{**}(x^{**})\|_{(X/Z)^{**}} \leq 1$ , тъй като  $J$  е линейна изометрия.

Понеже  $Z$  само по себе си е линейно пространство, можем да намерим  $z_0 \in Z$  такава, че

$$\|x_0 + z_0\|_X < \inf_{z \in Z} \|x_0 + z\|_X + \varepsilon = \|q(x_0)\|_{X/Z} + \varepsilon \leq 1 + \varepsilon.$$

Освен това имаме, че  $f(x_0 + z_0) = f(x_0) + f(z_0) = J(x_0)(f) + 0 = x^{**}(f)$ , т.е. твърдението на теоремата е изпълнено за  $x = x_0 + z_0$ . □

### Задача 3

Нека  $X$  и  $Y$  са банахови пространства и нека  $T$  е линеен оператор от  $X$  в  $Y$ . Покажете, че  $T$  е непрекъснат от слабата в слабата топология точно тогава, когато е ограничен.

**Бележка.** *Първата част от решението не е вярна, но съм го оставил, защото така съм си предал задачите.*

*Доказателство.* Нека  $T : X \rightarrow Y$  е непрекъснат от слабата в слабата топология, т.е.  $T^{-1}(A) \in w_X \ \forall A \in w_Y$ . Допускаме, че  $T$  не е ограничен. Тогава съществува  $w_X$ -сходяща мрежа  $\{x_i\}_{i \in I}$  такава, че  $\{T(x_i)\}_{i \in I}$  е неограничена в  $\|\cdot\|_Y$ . От непрекъснатостта на  $T$  следва, че мрежата  $\{T(x_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  е  $w_Y$ -сходяща и от теоремата на Банах-Щайнхаус получаваме, че мрежата е ограничена в нормата на  $Y$ . Но това противоречи на допускането за неограниченост на  $T$ . Значи  $T$  е ограничен.

Обратно, нека  $T$  е ограничен и нека  $\{x_i\}_{i \in I}$  е  $w_X$ -сходяща към  $x$  мрежа. Фиксираме функционала  $g \in Y^*$  и дефинираме  $f(x) = g(Tx)$ . Очевидно  $f \in X^*$  като композиция на ограничени оператори. Но от слабата сходимост на  $\{x_i\}$  следва сходимостта на мрежата  $\{f(x_i)\}_{i \in I} = \{g(T(x_i))\}_{i \in I}$ . Тъй като  $g \in Y^*$  беше произволен, то  $\{T(x_i)\}_{i \in I}$  е  $w_Y$ -сходяща към  $T(x)$ , тъй като слабата сходимост към дадена стойност е еквивалентна на сходимост за функционалните стойности на всеки ограничен линеен функционал.  $\square$